

**Program dwuletniego kursu przygotowania do egzaminu maturalnego
(dla uczniów czteroletniego liceum ogólnokształcącego i pięcioletniego technikum).**

**Zgodny z podstawą programową przedmiotu matematyka
III etap edukacyjny (czteroletnie liceum, pięcioletnie technikum)
dla poziomu podstawowego.**

Semestr I. (14 spotkań – raz w tygodniu 2 x 45 minut)

- **Dział 1. Liczby rzeczywiste**

Spotkanie 1. Liczby naturalne, całkowite, wymierne i niewymierne.

(konstrukcja zbioru liczb rzeczywistych; liczby parzyste i nieparzyste, liczby pierwsze i złożone; proste dowody dotyczące działań na liczbach i podzielności liczb całkowitych; stosowanie cech podzielności liczby przez 2, 3, 5, 9; wyznaczanie NWD i NWW dwóch liczb naturalnych; twierdzenie o rozkładzie liczby na czynniki pierwsze; działania na liczbach wymiernych; szacowanie wartości nieskomplikowanych wyrażeń arytmetycznych zawierających liczby niewymierne)

Spotkanie 2. Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej. Zaokrąglanie liczb.

(postać dziesiętna liczby rzeczywistej, metoda przedstawiania ułamków zwykłych w postaci dziesiętnej, metoda przedstawiania ułamków dziesiętnych w postaci ułamków zwykłych; reguła zaokrąglania, przybliżanie z nadmiarem i z niedomiarem, błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia)

Spotkanie 3. Pierwiastek kwadratowy i sześcienny.

(definicja pierwiastka kwadratowego z liczby nieujemnej, działania na pierwiastkach kwadratowych; definicja pierwiastka sześciennego; działania na pierwiastkach sześciennych i dowolnego stopnia; wyłączanie czynnika przed znak pierwiastka, włączanie czynnika pod znak pierwiastka)

Spotkanie 4. Potęga o wykładniku całkowitym i wymiernym.

(potęga o wykładniku całkowitym i wymiernym; własności działań na potęgach o wykładnikach całkowitych i wymiernych; notacja wykładnicza)

Spotkanie 5. Procenty.

(pojęcie procentu i promila; obliczenia procentowe: obliczanie procentu danej liczby, obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba, wyznaczenie liczby, gdy dany jest jej procent, zmniejszanie i zwiększanie liczby o dany procent; podatki, lokaty, procent składany, punkty procentowe)

Spotkanie 6. Sprawdzian 1. Omówienie zagadnień ze sprawdzianu .

- **Dział 2. Język matematyki**

Spotkanie 7. Zbiory. Działania na zbiorach.

(sposoby opisywania zbiorów, zbiory skończone i nieskończone, zbiór pusty, definicja podzbioru, relacja zawierania zbiorów, zapis symboliczny zbiorów liczb: naturalnych, całkowitych, wymiernych i rzeczywistych; działania na zbiorach: suma, różnica, część wspólna i dopełnienie)

Spotkanie 8. Przedziały. Działania na przedziałach.

(określenie przedziałów: otwartego, domkniętego, lewostronnie domkniętego, prawostronnie domkniętego, ograniczonego, nieograniczonego, zapis symboliczny przedziałów, zaznaczanie na osi liczbowej danego przedziału liczbowego; działania na przedziałach: suma, różnica, iloczyn)

Spotkanie 9. Rozwiązywanie równań i nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.

(rozwiązywanie równań i nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą; nierówności sprzeczne i tożsamościowe)

Spotkanie 10. Wyrażenia algebraiczne. Wzory skróconego mnożenia. Wartość bezwzględna.

(wyłączanie jednomianu przed nawias, mnożenie sum algebraicznych; wzory skróconego mnożenia na $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$, usuwanie niewymierności z mianownika; interpretacja algebraiczna i geometryczna wartości bezwzględnej, proste równania i nierówności z wartością bezwzględną typu: $|x| = 5$, $|x| \leq 3$)

Spotkanie 11. Sprawdzian 2. Omówienie zagadnień ze sprawdzianu.

- **Dział 3. Układy równań**

Spotkanie 12. Układ równań. Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania i metodą przeciwnych współczynników.

(pojęcie układu równań, rozwiązywania układów równań metodą podstawiania, definicja układu równań oznaczonego, sprzecznego, nieoznaczonego, rozwiązywania układów równań metodą przeciwnych współczynników)

Spotkanie 13. Układy równań – zadania tekstowe.

(zastosowanie układów równań do rozwiązywania zadań tekstowych)

Spotkanie 14. Test po I semestrze kursu. Omówienie zagadnień z testu.

Semestr II. (14 spotkań – raz w tygodniu 2 x 45 minut)

- **Dział 4 i 5. Funkcje i funkcja liniowa.**

Spotkanie 15. Pojęcie funkcji. Sposoby przedstawiania funkcji. Miejsca zerowe funkcji.

Układ współrzędnych - przypomnienie. Szkicowanie wykresu funkcji.

(pojęcie funkcji i sposoby jej przedstawiania, pojęcia: dziedzina, argument, przeciwdziedzina, zbiór wartości funkcji, wartość funkcji; obliczanie ze wzoru wartości funkcji dla danego argumentu i na odwrót; pojęcie miejsca zerowego funkcji, wyznaczanie dziedziny i miejsc zerowych na podstawie wzoru funkcji; szkicowanie wykresu funkcji)

Spotkanie 16. Monotoniczność funkcji. Odczytywanie własności funkcji z wykresu.

(pojęcie funkcji monotonicznej, pojęcie funkcji przedziałami monotonicznej; odczytywanie z wykresu własności funkcji: dziedzina, zbiór wartości, miejsca zerowe, monotoniczność funkcji, wartość największa i najmniejsza, znak funkcji)

Spotkanie 17. Przesunięcie wykresu wzdłuż osi OY i OX .

Przekształcenie wykresu przez symetrię względem osi OY i OX .

(metoda otrzymywania wykresów funkcji $y = f(x) + q$ dla $q > 0$, metoda otrzymywania wykresów funkcji $y = f(x - p)$ dla $p > 0$ oraz $y = f(x + p)$ dla $p > 0$ oraz $y = f(x) - q$ dla $q > 0$, metoda otrzymywania wykresu funkcji $y = -f(x)$, metoda otrzymywania wykresu funkcji $y = -[f(x - p) + q]$, metoda otrzymywania wykresu funkcji $y = f(-x)$)

Spotkanie 18. Funkcja liniowa. Proste. Interpretacja geometryczna układu równań liniowych.

(definicja funkcji liniowej, wykres funkcji liniowej, współczynnik kierunkowy prostej, proste równoległe, pojęcia: pęk prostych, środek pęku, punkt przecięcia wykresu funkcji liniowej z osią OY , miejsce zerowe funkcji liniowej, monotoniczność funkcji liniowej; proporcjonalność prosta, równanie kierunkowe prostej, równanie ogólne prostej, współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez dwa dane punkty, interpretacja geometryczna współczynnika kierunkowego, warunek prostokątności prostych, o danych równaniach kierunkowych, wyznaczanie równania prostej prostopadłej do danej prostej; interpretacja geometryczna układu oznaczonego, sprzecznego i nieoznaczonego)

Spotkanie 19. Sprawdzian 3. Omówienie zagadnień ze sprawdzianu.

- **Dział 6 i 7. Planimetria – cz.1. Funkcja kwadratowa.**

Spotkanie 20. Miary kątów w trójkącie. Punkty specjalne w trójkącie. Cechy przystawania i podobieństwa trójkątów. Wielokąty podobne i ich pola. Twierdzenie Talesa. Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie.

(klasyfikacja trójkątów, twierdzenie o sumie miar kątów w trójkącie, kąty przyległe, wierzchołkowe, odpowiadające, naprzemianległe, kąt zewnętrzny trójkąta, punkty specjalne w trójkącie, definicja trójkątów przystających, cechy przy-

stawania trójkątów, nierówność trójkąta, twierdzenie Talesa, twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa, definicja wielokątów podobnych, skala podobieństwa, zależność między obwodami wielokątów podobnych a skalą podobieństwa, cechy podobieństwa trójkątów, zależność między polami wielokątów podobnych a skalą podobieństwa, twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie)

Spotkanie 21. Funkcja kwadratowa – cz.1.

(wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej, wykres funkcji kwadratowej – szkicowanie paraboli i odczytywanie własności, interpretacja współczynników występujących we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (o ile istnieje), wyznaczanie delty (wyróżnik trójmianu kwadratowego), współrzędne wierzchołka paraboli $W(p, q)$, miejsca zerowe funkcji kwadratowej)

Spotkanie 22. Funkcja kwadratowa – cz.2.

(równania kwadratowe, nierówności kwadratowe, równania sprowadzalne do równań kwadratowych, wartość najmniejsza i największa funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym, układy równań drugiego stopnia, parabola i prosta na płaszczyźnie – sieczna paraboli, styczna do paraboli, zastosowanie funkcji kwadratowej w zadaniach praktycznych)

Spotkanie 23. Sprawdzian 4. Omówienie zagadnień ze sprawdzianu.

- **Dział 8. Wielomiany.**

Spotkanie 24. Stopień i współczynniki wielomianu. Działania na wielomianach. Wzory skróconego mnożenia.

(definicja wielomianu i jego stopień, współczynniki wielomianu, wyraz wolny wielomianu, pojęcie wielomianu zerowego, porządkowanie wielomianu, dodawanie wielomianów, odejmowanie wielomianów, stopień sumy i różnicy wielomianów, wielomian dwóch (trzech) zmiennych, mnożenie wielomianów, stopień iloczynu wielomianów, wzory skróconego mnożenia: $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$)

Spotkanie 25. Rozkład wielomianu na czynniki. Równania wielomianowe.

(rozkład wielomianu na czynniki: wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias, rozkład trójmianu kwadratowego na czynniki, zastosowanie wzorów skróconego mnożenia: kwadratu sumy i różnicy oraz wzoru na różnicę kwadratów; twierdzenie o rozkładzie wielomianu na czynniki, zastosowanie wzorów skróconego mnożenia: sumy i różnicy sześciątów, metoda grupowania wyrazów; pojęcie pierwiastka wielomianu, równanie wielomianowe)

**Spotkanie 26. Dzielenie wielomianów. Twierdzenie Bézouta. Pierwiastki całkowite wielomianu.
Wielomiany – zastosowanie.**

(algorytm dzielenia wielomianów, podzielność wielomianów, twierdzenie o reszcie, twierdzenie Bézouta, twierdzenie o pierwiastkach całkowitych wielomianu, zastosowanie wielomianów do rozwiązywania zadań tekstowych)

Spotkanie 27. Sprawdzian 5. Omówienie zagadnień ze sprawdzianu.

Spotkanie 28. Test po II semestrze kursu. Omówienie zagadnień z testu.

Semestr III. (14 spotkań – raz w tygodniu 2 x 45 minut)

• **Dział 9. Funkcje wymierne.**

Spotkanie 29. Proporcjonalność odwrotna. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ wzdłuż osi OX i OY .

(hiperbola – wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $a \neq 0$, asymptoty poziome i pionowe wykresu funkcji, własności funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $a \neq 0$, metoda otrzymywania wykresu funkcji $y = \frac{a}{x} + q$, metoda otrzymywania wykresu funkcji $y = \frac{a}{x-p}$)

Spotkanie 30. Wyrażenia wymierne i funkcje wymierne. Mnożenie i dzielenie oraz dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych. Równania wymierne.

(wyrażenie wymierne, dziedzina wyrażenia wymiernego, funkcja wymierna, mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych, dziedziny iloczynu i ilorazu wyrażeń wymiernych, dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych, dziedziny sumy i różnicy wyrażeń wymiernych, przekształcenia wzorów, równania wymierne typu $\frac{u(x)}{w(x)} = 0$, równania wymierne wymagające przekształcania wyrażeń wymiernych)

Spotkanie 31. Równania i nierówności z wartością bezwzględną. Wyrażenia wymierne – zastosowania.

(równania z wartością bezwzględną, nierówności z wartością bezwzględną, zastosowanie wyrażeń wymiernych do rozwiązywania zadań tekstowych, zastosowanie zależności $t = \frac{s}{v}$)

Spotkanie 32. Sprawdzian 6. Omówienie zagadnień ze sprawdzianu.

- **Dział 10. Trygonometria.**

Spotkanie 33. Trójkąty prostokątne. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego.

(twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa, wzory na długość przekątnej kwadratu i wysokość trójkąta równobocznego; definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego, wartości funkcji trygonometrycznych kątów: 30° , 45° , 60°)

Spotkanie 34. Trygonometria – zastosowania w zadaniach. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych.

(odczytywanie wartości funkcji trygonometrycznych kątów w tablicach, odczytywanie miary kąta, dla którego dana jest wartość funkcji trygonometrycznej, rozwiązywanie trójkątów prostokątnych)

Spotkanie 35. Związki między funkcjami trygonometrycznymi. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego.

(podstawowe tożsamości trygonometryczne, zależności między funkcjami trygonometrycznymi kątów ostrych w trójkącie prostokątnym: $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$, $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$; ramię początkowe, ramię końcowe kąta; kąt wypukły, kąt rozwarty; funkcje trygonometryczne kąta wypukłego, zależności:
 $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$)

Spotkanie 36. Pole trójkąta. Pole czworokąta.

(wzory na pole trójkąta ($P = \frac{1}{2}ah$, $P = \frac{1}{2}absin\gamma$, wzór Herona), wzór na pole trójkąta równobocznego, wzory na pola: kwadratu, prostokąta, równoległoboku, rombu, trapezu)

Spotkanie 37. Sprawdzian 7. Omówienie zagadnień ze sprawdzianu.

- **Dział 11. Planimetria – cz.2.**

Spotkanie 38. Okrąg i koło. Wzajemne położenie okręgu i prostej. Kąty w okręgu.

(długość okręgu, kąt środkowy, długość łuku okręgu, wzajemne położenie okręgów; pole koła, pole wycinka koła, pierścień kołowy, odcinek koła; styczna do okręgu, sieczna okręgu, twierdzenie o odcinkach stycznych; pojęcie kąta wpisanego, twierdzenie o kątach środkowym i wpisanym, opartych na tym samym łuku oraz wnioski z tego twierdzenia, twierdzenie o kącie między styczną a cięciwą okręgu, twierdzenie o cięciwach)

Spotkanie 39. Okrąg opisany na trójkącie. Okrąg wpisany w trójkąt. Wielokąty foremne.

(okrąg opisany na trójkącie, promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym, wzór na pole trójkąta $P = \frac{abc}{4R}$; okrąg wpisany w trójkąt, wzór na pole trójkąta $P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$; wielokąt foremny, miara kąta wewnętrznego wielokąta foremnego, promień okręgu opisanego na sześciokącie foremnym, promień okręgu wpisanego w sześciokąt foremny)

Spotkanie 40. Twierdzenie sinusów. Twierdzenie cosinusów.

(twierdzenie sinusów; twierdzenie cosinusów; długości boków trójkąta, a miary kątów leżących naprzeciwko tych boków, twierdzenie o najdłuższym boku trójkąta)

Spotkanie 41. Sprawdzian 8. Omówienie zagadnień ze sprawdzianu.

Spotkanie 42. Test po III semestrze kursu. Omówienie zagadnień z testu.

Semestr IV. (14 spotkań – raz w tygodniu 2 x 45 minut)

- **Dział 12. Funkcja wykładnicza i logarytmiczna.**

Spotkanie 43. Funkcja wykładnicza.

(własności potęg, potęga o wykładniku rzeczywistym, wzór funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, $x \in R$, wykres funkcji wykładniczej dla różnych podstaw – krzywa wykładnicza, odczytywanie własności funkcji na podstawie wykresu, wykorzystanie funkcji wykładniczej w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym)

Spotkanie 44. Logarytm i jego własności. Funkcja logarytmiczna.

(definicja logarytmu, własności logarytmu: wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu, logarytm potęgi, logarytm w wykładniku potęgi; logarytm dziesiętny; wzór funkcji $f(x) = \log_a x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, $x > 0$, wykres funkcji logarytmicznej dla różnych podstaw, odczytywanie własności funkcji na podstawie wykresu, wykorzystanie funkcji logarytmicznej w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym)

Spotkanie 45. Sprawdzian 9. Omówienie zagadnień ze sprawdzianu.

- **Dział 13 i 14. Geometria analityczna. Ciągi.**

Spotkanie 46. Geometria analityczna – cz.1.

(wyznaczanie równania prostej na płaszczyźnie przechodzącej przez dwa dane punkty – w postaci kierunkowej lub ogólnej; wyznaczanie długości odcinka; wyznaczanie współrzędnych środka odcinka; badanie równoległości i prostokątności prostych na płaszczyźnie; wyznaczanie równania prostej, która jest równoległa lub prostokątna do danej prostej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt; wyznaczanie współrzędnych punktu przecięcia się dwóch prostych; wyznaczanie odległości punktu od prostej)

Spotkanie 47. Geometria analityczna – cz.2.

(okrąg w układzie współrzędnych; równanie okręgu; wzajemne położenie dwóch okręgów; wzajemne położenie okręgu i prostej – punkty wspólne; symetria osiowa; symetria środkowa)

Spotkanie 48. Ciąg liczbowy – określenie i własności. Ciąg arytmetyczny.

(definicja ciągu liczbowego, ciąg skończony i nieskończony, monotoniczność ciągu, wyznaczanie wyrazu ciągu określonego wzorem ogólnym; ciągi określone rekurencyjnie; definicja ciągu arytmetycznego, wzór ogólny ciągu arytmetycznego, badanie, czy dany ciąg jest arytmetyczny, wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, związek między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego)

Spotkanie 49. Ciąg geometryczny.

(definicja ciągu geometrycznego, wzór ogólny ciągu geometrycznego, badanie, czy dany ciąg jest geometryczny, wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, związek między sąsiednimi wyrazami ciągu geometrycznego; wykorzystanie własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, podczas rozwiązywania

zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym, m.in. zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok), koszty kredytów)

Spotkanie 50. Sprawdzian 10. Omówienie zagadnień ze sprawdzianu.

- **Dział 15. Statystyka.**
- **Dział 16. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa.**
- **Dział 17. Stereometria.**
- **Dział 18. Dowody.**

Spotkanie 51. Wielkości statystyczne.

(wyznaczanie średniej arytmetycznej i ważonej w danym zestawie liczb; wyznaczanie mediany, dominanty, wariancji i odchylenie standardowego w zestawie danych; interpretowanie tych parametrów dla danych zadania)

Spotkanie 52. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa.

(wstęp do rachunku prawdopodobieństwa – pojęcia podstawowe; zliczanie obiektów w prostych sytuacjach kombinatorycznych, stosowanie reguły mnożenia i dodawania; stosowanie permutacji, wariacji z powtórzeniami i bez powtórzeń; klasyczna definicja prawdopodobieństwa; własności prawdopodobieństwa; wartość oczekiwana)

Spotkanie 53. Graniastosłupy, ostrosłupy, były obrotowe.

(rodzaje graniastosłupów: proste, prawidłowe, pochyle; kąty i odcinki w graniastosłupach; sześcian i prostopadłościan; przekroje prostopadłościanów; wzór na objętość dowolnego graniastosłupa; wzór na objętość

graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, trójkątnego, sześciokątnego; wzór na pole powierzchni całkowitej dowolnego graniastosłupa; wzór na pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, trójkątnego, sześciokątnego; stosowanie trygonometrii do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości)

(rodzaje ostrosłupów: proste, prawidłowe, pochyłe; kąty i odcinki w ostrosłupach; wzór na objętość dowolnego ostrosłupa; wzór na objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, trójkątnego, sześciokątnego; wzór na pole powierzchni całkowitej dowolnego ostrosłupa; wzór na pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, trójkątnego, sześciokątnego; stosowanie trygonometrii do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości)

(walec, stożek, kula; rozpoznawanie w walcach i w stożkach kąta między odcinkami oraz kąta między odcinkami, a płaszczyznami, obliczanie miar tych kątów; pole powierzchni całkowitej i objętość walca, pole powierzchni całkowitej i objętość stożka, pole powierzchni całkowitej i objętość kuli; bryły podobne)

Spotkanie 54. Dowody – algebra i geometria.

(przykłady zadań na dowodzenie w algebrze i geometrii)

Spotkanie 55. Test po IV semestrze kursu. Omówienie zagadnień z testu.

- **Dział 19. Przykładowy arkusz egzaminacyjny.**

Spotkanie 56. Przykładowy arkusz maturalny.

(rozwiązywanie przykładowego arkusza maturalnego)

